805. *Banach* ノ或ル問題ニツイテ

小松崎　均（北大）

S. *Banach* ハ彼ノ著書[1)] ノ巻末ニ次ノ様ナ問題ヲ掲ゲテ居ル：

（脚註）次頁へ.

type (B) ノ空間ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{M}$ ニ對シ、空間 (B) ノ任意ノ element f ガ uniquely ニ $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ トナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ元ノ空間ニ存在スルカ？

空間 (B) ガ特ニ $(L^{(2)})$ ノトキハ肯定デ、(L), (l), $(L^{(p)})$ $2 \neq p > 1$, $(l^{(p)})$ $2 \neq p > 1$ ノトキハ否定デアルコトガ知ラレテ居ル。此処デハ空間 (L) ガ否定デアルコトカラ空間 (C), (c), (M), (m), $(C^{(p)})$ $p \geq 1$, (C_0) ニ於テモ上記ノ問題ガ否定ナルコトヲ示サントス。

$\boxed{1}$ 自然数 m ニ對シ、各 interval $\frac{i-1}{m} \leq t < \frac{i}{m}$ $i = 1, 2, \ldots\ldots, m-1$, 及ビ $\frac{m-1}{m} \leq t \leq 1$ ニ於テ constant デ、有理数ヲソノ値ニ持ツヤウナ閉区間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サレタ step-function ノ凡テノ集合ヲ考ヘル。コノ集合ノ任意ノ二ツノ element $x(t)$, $y(t)$ ノ一對ニ對シ、實数

$$(1) \quad dis(x, y) = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| x(t) - y(t) \right|$$

ヲ對應サセテ metric space トスル。更ニコノ metric ニ依ッテコノ空間ヲ Komplettierung シテ得ラレル空間ヲ (C^*) ヲ以ッテ表ハス。ソウスルト (C^*) ノ element

---

1) S. Banach; Théorie des opérations linéaires. Warszaw. 1932. P. 244–245 特ニ問題 (7) ヲ参照。吾々ハ之ヲ今後單ニ B: Théorie; ト表ハスコトニスル。

ハ區間 $0 \leq t \leq 1$ デ定義サレタ uniformly convergent ナ step-function ノ極限トシテ表ハサレル。(C^*) ハ明ラカニ metric, linear ナ空間デアル。又上ノ様ナ step-function ノ數ハ可附番個デ、(C^*) ハソレヲ Komplettierung シタ空間デアルカラ separable 且ツ complete デアル。更ニ (1) ハ type (B) ナルタメノ三ツノ條件[1]ヲ充スカラ (C^*) ハ type (B) ノ空間デアル。連續函數ハ step-function ニ依ッテ approximation サレ、(C) ト (C^*) トハ同一ノ metric ヲ持ツ。故ニ (C) ハ (C^*) ニ含マレル。尚ホ序ニ二三ノ定義ヲ附加ヘヨウ。

$\mathfrak{M}$ ヲ空間 (B) ノ中ノ closed linear manifold トスルト、E ガ空間 (B) カラ $\mathfrak{M}$ ヘノ projection ナリトハ、$E(B) = \mathfrak{M}$, $E^2 = E$ デアル様ナ bounded linear transformation ヲ云フ。

(C_n) ハ n 個ノ實數ノ系列 $\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$ ヲソノ element トシ、ソノ norm ガ

$$\left\| \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\} \right\| = \max_{i=1,2,\cdots n} |a_i|$$

デ定義サレタ空間ヲ表ハス。但シ $(C_\infty) = (C)$ トスル。

$(B) \simeq (B')$ ハ空間 (B) ト空間 (B') トガ isometrically ニ isomorphic ナルコトヲ表ハス。

---

1) B: Théorie; P. 53 參照

F. J. Murray[1]ノLemma 1.1ニ依ッテ吾々ノ問題ハ次ノ如クナル；

Λヲ以ッテ(C), (c), (M), (m), ($C^{(p)}$) $p \geq 1$, (C_0)ノ中ノ一ツヲ表ハシ、$\mathfrak{M}$ヲ空間Λノ任意ノclosed linear manifoldトスルト、空間Λカラ$\mathfrak{M}$ヘノprojectionガ存在スルカ？

最初コノ問題ガ(C^*)ニ於テ否定サレルナラバ、(C)ニ於テモ否定サレルコトヲ示サウ。ソノタメニ先ヅ二三ノLemmaノ証明カラ始メル。

$\boxed{2}$　定義1.　$(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots \times (C_{m_n})$ハ$n$, m_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$ガfinite, infiniteノ場合ヲ考ヘ；(i) $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $m_i = 1, 2, \cdots\cdots$ノトキハ、$f_i \in (C_{m_i})$トスルトelementガ$\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$デアルヤウナ順序ヅケラレタ系列ノ空間ヲ表ハシ、ソノnormヲ$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ト定義スル。

(ii) $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $m_i = \infty$ (或ルiニ對シ)ノトキハ$f_i \in (C_{m_i})$, $f_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{i m_i}\}$トスルト、$f_i$ノ凡テノelement $\{a_{ij}\}$ $i = 1, 2, \cdots\cdots n$, $j = 1, 2, \cdots\cdots$ヲ對角線ノ方法ニ依ッテ一列ニ並ベ即チ形式的ニハ

---

1) F. J. Murray; Relations between certain problems of Banach. Studia Math. T. VI, 1936, P. 199 吾々ハ之ヲ今後M: Relations; ノ如ク表ハス.

$\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots\cdots, a_{1i} \cdots\cdots a_{l, i-l+1} \cdots a_{i1} \cdots\cdots\}$ トシ、コレガ converge スル様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ヲソノ element トシ、ソノ norm ガ $\|\{f_1 f_2 \cdots\cdots f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ デ定義サレタ空間ヲ表ハス。

(iii) $n = \infty$, $m_i = 1, 2, \cdots\cdots \infty$ ノトキ $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots$ ハ (ii) ト同様ニ $f_i \in (C_{m_i})$ トシ、f_i ノ凡テノ element $\{a_{ij}\}$ $i = 1, 2, \cdots\cdots$, $j = 1, 2, \cdots\cdots$ ヲ對角線ノ方法ニヨツテ一列ニ並ベ、ソレガ converge スル様ナ順序付ケラレタ系列 $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ヲ element トシ、ソノ norm ガ $\|\{f_1 f_2 \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots\cdots}{l.u.b.} \|f_i\|$ デ定義サレタ空間ヲ表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots \times (C_n^*)$ $n = 1, 2, \cdots\cdots$, $(C_i^*) = (C^*)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots n)$; ハ $f_i \in (C_i^*)$ トスルト element ガ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ デ、ソノ norm ガ $\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\| = \max\limits_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\|$ デ定義サレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ表ハス。

$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots$, $(C_i^*) = (C^*)$ $(i = 1, 2, \cdots\cdots)$; ハ $f_i \in (C_i^*)$ トスルト、或ル constant ニ uniformly ニ converge スル系列 $\{f_1 f_2, \cdots\cdots\}$ ヲ element トシ、norm ガ $\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.} \|f_i\|$ デ定義サレタ順序付ケラレタ系列ノ空間ヲ表ハス。

Lemma 1 (a) $(C_{m_1}) \times (C_{m_2}) \times \cdots\cdots \times (C_{m_n}) \simeq (C_m)$, $n = 1, 2, \cdots\cdots \infty$, $m_n = 1, 2, \cdots\cdots \infty$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = m$.

($n=\infty$ ナラバ (C_{m_n}) ヲ除ク)

(b) $(C_1^*)\times(C_2^*)\times\cdots\cdots\times(C_n^*)\simeq(C^*)$, $n=1,2,\cdots\cdots\infty$

($n=\infty$ ナラバ (C_n^*) ヲ除リ)

(證明) (a) ニ對シテハ (i) $n, m_i<\infty$ ノトキハ、

$(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots\cdots\times(C_{m_n})$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$,

$f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots a_{im_i}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ニ對

シ (C_m) ノ element $f=\{a_{11}\cdots\cdots a_{1m_1}\cdots\cdots a_{n1}\cdots\cdots a_{nm_n}\}$

ヲ對應サセル。ソウスルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}\|=\max_{i=1,2,\cdots\cdots n}\|f_i\|=\max_{i=1,2,\cdots n}\left(\max_{j=1,2,\cdots m_i}|a_{ij}|\right)$$

$$=\max_{i,j}|a_{ij}|=\|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ norm ガ変ラナイカラコノ場合 (a) ハ成立スル。

(ii) $n<\infty$ $m_i=\infty$ (或ルiニ對シ) ノトキハ、

$(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots\cdots\times(C_{m_n})$ ノ element $\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}$,

$f_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{im_i}\}$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ トスルト、假定ニヨツテ $\{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \cdots\cdots, a_{1i}, \cdots\cdots, a_{i1}, \cdots\cdots\}$ ハ converge スルカラ之レヲ f トオクト、fハ (C_∞) ノ element デアル。依ツテ $\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}$ ニ對シ (C_∞) ノ element f ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1 f_2\cdots\cdots f_n\}\|=\max_{i=1,2,\cdots n}\|f_i\|$$

$$=\max_i\left(\underset{j=1,2,\cdots\cdots}{\mathrm{l.u.b.}}|a_{ij}|\right)=\|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ normガ変ラナイカラコノ場合ニモ

(a) ハ成立スル。

(iii) $n=\infty$, $m_i=1,2,\cdots\cdots\infty$ ノトキ $(C_{m_1})\times(C_{m_2})\times\cdots$ $\cdots$ ノ element ヲ $\{f_1 f_2 \cdots\cdots\}$ トスルト、(ii) ト同様ニ f_i ノ凡ベテノ element ヲ一列ニ並ベタ $\{a_{11}a_{12}a_{21}\cdots\cdots a_{1i}\cdots\cdots a_{i1}\cdots\cdots\}$ ハ假定ニヨッテ converge スルカラ之レヲ f トオクト、f ハ (C_∞) ノ element デアル。依ッテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ニ対シ (C_∞) ノ element f ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1,f_2,\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b}\|f_i\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.}\left(\underset{j=1,2,\cdots}{l.u.b.}|a_{ij}|\right)$$

$$= \underset{i,j}{l.u.b.}|a_{ij}| = \|f\|$$

コノ對應ハ1對1デ且ツ norm が変ラナイカラコノ場合モ (a) ハ成立スル。

(b) ノ場合ヲ証明スルタメニ、(C^*) ノ任意ノ element φ ニ対シ、$T(\varphi)=\varphi(t;[0,1])$[1] ナル transformation ニ依ッテ移サレタ (C^*) ノ像ヲ $(\hat{C})$ トシ、$(\hat{C})$ ノ任意ノ element $x(t)$ ニ対シ、ソノ norm ヲ

$\|x\| = \underset{0\leq t<1}{l.u.b.}|x(t)|$ ト定義スル。ソシテスルト $(C^*)\simeq(\hat{C})$ ナルコトが証明出来ル。ソレニハコノ對應が1對1デ norm が変ラナイコトヲ云エバヨイ。(C^*) ニ於テ everywhere dense ナ step-function ヲ $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_n, \cdots\cdots$ トスルト、$\|T(\varphi_n)\|=\|\varphi_n\|$, $\|T(\varphi)\|\leq\|\varphi\|$ ハ明ラカデ

---

1) $\varphi(t:[0,1])$ ハ $\varphi(t)$ ノ定義領域ヲ $0\leq t\leq 1$ カラ $0\leq t<1$ ニ狭メタモノヲ表ハス。

アル。他方ニ於テ φ ニ uniformly ニ converge スル $\{\varphi_n\}$ ノ部分列ヲ $\{\varphi_{n_\nu}\}$ トスルト

$\varepsilon > 0$ ニ對シ、正整数 $N(\varepsilon)$ ガ決リ、$\nu > N(\varepsilon)$ ニ對シ

$$\big|\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|\big| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2,$$

$$\begin{aligned}\big|\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|T(\varphi)\|\big| &\leq \|T(\varphi_{n_\nu}) - T(\varphi)\| \\ &= \|T(\varphi_{n_\nu} - \varphi)\| \leq \|\varphi_{n_\nu} - \varphi\| < \varepsilon/2\end{aligned}$$

ナラシメルコトガ出來ル。

$$\begin{aligned}\therefore\ \big|\|T(\varphi)\| - \|\varphi\|\big| &\leq \big|\|T(\varphi)\| - \|T(\varphi_{n_\nu})\|\big| + \big|\|T(\varphi_{n_\nu})\| - \|\varphi_{n_\nu}\|\big| \\ &\quad + \big|\|\varphi_{n_\nu}\| - \|\varphi\|\big| < \varepsilon\end{aligned}$$

従ッテ $\|T(\varphi)\| = \|\varphi\|$．故ニ $(C^*) \simeq (\tilde{C})$ ガ証明出來タ。

次ニ $(\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots\cdots \times (\tilde{C}_n)$[1] $\simeq (\tilde{C})$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$.

ヲ証明シマス。先ヅ interval $[0, 1]$ ヲ n 等分シ．

$f_i \in (\tilde{C}_i)$ ニ対シ、$(\tilde{C})$ ノ element:

$$\bar{f}_{i(t)} \begin{cases} = f_i(nt - i + 1) & \dfrac{i-1}{n} \leq t < \dfrac{i}{n} \\[2ex] = 0 & 0 \leq t < \dfrac{i-1}{n},\ \dfrac{i}{n} \leq t < 1. \end{cases}$$

ヲ對應サセル．$\bar{f}_i, \bar{f}_j$ $(i \neq j)$ ハソノ値ガ 0 ニナル點以外ハ重ラナイ。$(\tilde{C})$ ハ linear デアルカラ $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots + \bar{f}_n$ ハ $(\tilde{C})$ ノ element デアル。依ッテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ニ對シ $(\tilde{C})$ ノ element $\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots + \bar{f}_n$ ヲ

---

1) $(\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots\cdots \times (\tilde{C}_n)$ ハ $(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots \times (C_n^*)$ ト同様ノ意味ヲ持ツモノトス。

對應サセル。ソウスルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots f_n\}\| = \max_{i=1,2,\cdots n} \|f_i\| = \|\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots + \bar{f}_n\|$$

コノ對應ハ1對1デ norm ガ变ラナイカラ n ガ finite ノ場合ハ成立スル。

$n = \infty$ ノトキハ、$f_i \leftarrow (\tilde{C}_i)$ ニ對シ $(\tilde{C})$ ノ element:

$$\bar{f}_i(t) \begin{cases} = f_i[(i+1)(it-i+1)] & \frac{i-1}{i} \leqq t < \frac{i}{i+1} \\ = 0 & 0 \leqq t < \frac{i-1}{i},\ \frac{i}{i+1} \leqq t < 1 \end{cases}$$

ヲ對應サセル。假定ニヨッテ $(\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots\cdots\cdots$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ハ或ル constant ニ uniformly ニ converge スルカラ、$\bar{f}_1 + \bar{f}_2 + \cdots\cdots$ ハ $(\tilde{C})$ ノ element デアル。

依ッテ $\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}$ ニ對シ、$(\tilde{C})$ ノ element $\bar{f}_1 + f_2 + \cdots\cdots$ ヲ對應サセルト

$$\|\{f_1, f_2, \cdots\cdots\}\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.} \|f_i\| = \underset{i=1,2,\cdots}{l.u.b.} \|\bar{f}_i\|$$

$$= \|\bar{f}_1 + f_2 + \cdots\cdots\|$$

即チコノ對應ハ1對1デ norm ガ变ラナイカラ

$$(\tilde{C}_1) \times (\tilde{C}_2) \times \cdots\cdots \simeq (\tilde{C})$$

デアル。

既ニ証明シタ様ニ $(C^*) \simeq (\tilde{C})$ デアルカラ、$f_i \leftarrow (C^*)$ ニ對シ $(\tilde{C})$ ノ element $T(f_i)$ ヲ對應サセ、$(C_1^*) \times (C_2^*) \times \cdots\cdots \times (C_n^*)$ ノ element $\{f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n\}$ ニ對シ

$(\widetilde{C}_1)\times(\widetilde{C}_2)\times\cdots\cdots\times(\widetilde{C}_n)$ ノ element $\{T(f_1), T(f_2), \cdots\cdots; T(f_n)\}$ ヲ對應サセル。コノ對應ハ一對一デ norm ガ變ラナイ。

$$\therefore\ (C_1^*)\times(C_2^*)\times\cdots\cdots\times(C_n^*)\simeq(\widetilde{C}_1)\times(\widetilde{C}_2)\times\cdots\cdots\times(\widetilde{C}_n)\simeq(\widetilde{C})\simeq(C^*).$$ （證明終）

定義2. $\mathfrak{M}$ ヲ空間 (B) ノ closed linear manifold トスル時 $C(\mathfrak{M})$, $\overline{C}(B)$ ハ次ノコトヲ表ハス：

$$C(\mathfrak{M})\begin{cases}=\infty & \text{空間(B)カラ } \mathfrak{M} \text{ ヘノ projection ガ存在シナイトキ}\\ = gr.l.b.(|E|;\ E^2=E,\ E(B)=\mathfrak{M})\end{cases}$$

$$\overline{C}(B) = l.u.b.(C(\mathfrak{M});\ \mathfrak{M}\subset(B)\ \mathfrak{M}\text{ハ closed linear manifold}).$$

然ルニ M: Relations; ノ Lemma 2.1—2.3, 3.2—3.4 ハ如何ナル type (B) ノ空間ニ於テモ成立スルモノデアッテ、勿論 (C^*), (c) ニ於テモ成立スル。依ッテ次ノ定理ヲ得：

定理 I $\overline{C}(C^*)=C(\mathfrak{M})$, $\overline{C}(c)=C(\mathfrak{N})$ ナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ガ夫々 (C^*), (c) ノ中ニ存在シ, 且ツ

$$1=\overline{C}(c_1)\leq\overline{C}(c_2)\leq\cdots\cdots\leq\overline{C}(c_\infty)=\overline{C}(c)$$

ナリ。

3 定義3. 空間 (B) ガ n-dimensional $n\leq m$ トスルト、吾々ハ $\overline{C}_n(B)$ ヲ以ッテ

$\bar{C}_n(B) = l.u.b.(c(\mathfrak{M});\ \mathfrak{M} < (B),\ \mathfrak{M}$ ハ n-dim. closed lin. manif.)

ヲ表ハス。

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ $\bar{C}_n(C^*) \leq l.u.b.(\bar{C}_n(c_m);\ m<\infty)$.

（証明） $k_n = l.u.b.(\bar{C}_n(c_m);\ m<\infty)$ トオク。

$k_n=\infty$ ノトキハ明ラカニ成立スルカラ、$k_n<\infty$ ノ場合ヲ証明スレバヨイ。

ε ハ $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n < 1,\ 0<\varepsilon<1$ ヲ同時ニ充ス実数トス。

$\mathfrak{M}$ ヲ (C^*) ニ含マレル任意ノ n-dimensional closed linear manifold トシ、$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ中ノ n 個ノ linearly independent ナ element トス。若シ $\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\| = 1$ ナラバ.

M: Relations; ノ Lemma 4.2, 4.3 ニヨツテ正ノ整数 m ト interval $\left[\frac{p-1}{m}, \frac{p}{m}\right]$ $(p=1,2,\cdots\cdots m-1)$

及ビ $\left[\frac{m-1}{m}, 1\right]$ デ constant デ，且ツ

$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(f_i-h_i)\right\| \leq \varepsilon$ ナルヤウナ linearly independent ナ step-function $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ トガ存在スル。$\mathfrak{M}_0$ ヲ $h_1, h_2, \cdots\cdots, h_n$ ニ依ツテ張ラレル closed linear manifold トス。又

$$y_i(t)\begin{cases} =1 & \frac{i-1}{m} \leqq t < \frac{i}{m} \\ & \text{但シ } i=m \text{ ノトキハ } \frac{m-1}{m} \leqq t \leqq 1 \\ =0 & 0 \leqq t < \frac{i-1}{m},\ \frac{i}{m} \leqq t \leqq 1 \end{cases}$$

トスルト、$y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n$ ハ linearly independent デ、$\{y_i\}$ ニ依ッテ張ラレル closed linear manifold ヲ $\mathfrak{N}$ トスル。ソウスルト $\mathfrak{M}_0 \subset \mathfrak{N} \subset (C^*)$, $\mathfrak{N} \simeq (C_m)$, $\mathfrak{M}_0 \simeq (c_m)$ ナル関係ガアルカラ $\eta > 0$ ニ対シ

$$|E_0| \leqq \bar{C}_n(c_m) + \eta \leqq k_n + \eta$$

ナルヤウナ $\mathfrak{N}$ カラ $\mathfrak{M}_0$ ヘノ projection E_0 ガ存在スル。

$f \leftarrow (C^*)$ ニ対シ transformation F ヲ

$$Ff = \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)\, ds \cdot y_i(t)$$

ト定義スル。明ラカニ $Ff \in \mathfrak{N}$ デ、若シ $f \in \mathfrak{N}$ ナラバ、

$f = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j(t)$ （茲ニ ξ_j ハ実數）デ表ハサレルカラ

$$Ff = \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(\sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j(s)\right) ds \cdot y_i(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \xi_i\, ds\, y_i(t) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i y_i(t) = f$$

故ニ $F^2=F$ ヲ得ル。又

$$\|Ff\| = \max_{0\le t\le 1}\left|\sum_{i=1}^{m} m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} f(s)ds\cdot y_i(t)\right|$$

$$\le \max_{i=1,2,\cdots m}\left(m\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}|f(s)|ds\right) = \|f\|$$

コノコトカラ $\|F\|\le 1$ ガ出ル。他方ニ於テ $f\equiv 1$ トオクト、$\|Ff\|=1=\|f\|$、或ハ $\|f\|=\|Ff\|\le\|F\|\cdot\|f\|$、故ニ $\|F\|\ge 1$. 従ッテ $\|F\|=1$ デアル。

以上ノコトカラ F ハ (C^*) カラ $\mathfrak{N}$ ヘノ $\|F\|=1$ ナル様ナ *projection* デアルコトガ解ッタ。

次ニ E_0F ヲ考ヘル。コノ *range* ハ $\mathfrak{M}_0$ デアル即チ:

$$E_0F(C^*) = E_0\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_0.$$

若シ $f\in\mathfrak{M}_0$ ナラバ $E_0Ff=E_0f=f$. 従ッテ $(E_0F)^2 = E_0F$. 依ッテ E_0F ハ (C^*) カラ $\mathfrak{M}_0$ ヘノ *projection* デアル。

$$\therefore\quad C(\mathfrak{M}_0)\le|E_0F|\le|E_0|\cdot|F|=|E_0|\le k_n+\eta$$

η ハ任意ノ実数デアルカラ、$C(\mathfrak{M}_0)\le k_n<\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$.

依ッテ $\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot C(\mathfrak{M}_0)<1$ ヲ得ル。

M: Relations; ノ *Lemma* 5.1 ニ依ッテ

$$C(\mathfrak{M})\le C(\mathfrak{M}_0)\frac{1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}C(\mathfrak{M}_0)}\le\frac{k_n\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n\right)}{1-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}k_n}.$$

ε ハ任意ノ実数デアルカラ、$C(\mathfrak{M})\le k_n$. 然ルニ $\mathfrak{M}$ ハ

(C*) ノ任意ノ n-dimensional closed linear manifold デアルカラ $\overline{C}_n(C^*) \leq k_n$ デアル。

(証明終リ)

Lemma 2 ガ成立スレバ M: Relations; ノ Lemma 7.1 ハ (L_p), (l_p) ノ代リニ (C^*), (c) ヲ置キ換ヘテモ成立スルカラ即チ:

$$\overline{C}(C^*) \leq l.u.b.(\overline{C}(c_m),\ n<\infty).$$

之レト定理 I トニ依ッテ次ノ定理ヲ得:

$\boxed{\text{定理II}}$ $\overline{C}(C^*) \leq \overline{C}(c)$.

$\boxed{4}$ 今迄述ベタコトカラ (C^*) ニ於テ吾々ノ問題ガ否定デアルナラバ、定理 II ニヨッテ $\infty = \overline{C}(C^*) \leq \overline{C}(c)$ 即チ $\overline{C}(c) = \infty$ トナル。定理 I ニ依ッテ $\overline{C}(c) = C(\mathfrak{N}) = \infty$ ナルヤウナ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ (c) ノ中ニ存在スル. コノコトハ (c) カラソノ中ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ヘノ projection ガ存在シナイコトヲ示ス。即チ (c) ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。

他方ニ於テ吾々ノ問題ハ (c) 及ビ (C^*) ニ於テ否定デアルコトガ証明出来ル。

何トナレバ空間 (L) ハ空間 (C) ノ或ル部分空間ト isometrically ニ isomorphic[1] デアルカラ、空間 $(\mathfrak{L})$ ヲ (C) ニ含マレ且ツ $(\mathfrak{L}) \simeq (L)$ ナルヤウナ closed

1) B: Théorie; P. 187. th. 10 参照.

linear manifold トセヨ。吾々ノ問題ハ (L) ニ於テ否定デアレカラ、$(\mathfrak{L})$ ニ於テモ否定デアル。若シ (C) ニ於テ肯定デアルナラバ、$\mathfrak{M}$ ヲ $(\mathfrak{L})$ ノ中ノ closed linear manifold トシタトキニ、closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ (C) ノ中ニ存在シテ、(C) ノ中ノ任意ノ element f ニ對シ、uniquely ニ $f = g + h$, $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ トナル。
特ニ $f \in (\mathfrak{L})$ トスルト $g \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{M}$, $h \in (\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{N}$ トナル。シカルニ $(\mathfrak{L})$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ ハ closed linear manifold デアルカラ $(\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{M}$, $(\mathfrak{L}) \cdot \mathfrak{N}$ モ亦 closed linear manifold デアル。コレハ假定ニ反ス。即チ (C) ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。全ク同様ニシテ (C^*) ニ於テモ否定デアルコトが證明出来ル。從ツテ (c) ニ於テモ否定デアル。

(M), (m) ニ於テ問題が否定ナルコト。

空間 (C) ハ空間 (M) ノ部分空間デ同一ノ metric ヲ有スルカラ、(C) ニ於テ否定ナラバ空間 (M) ニ於テモ否定ナルコトハ明ラカデアル。全ク同様ノ理由デ空間 (m) ニ於テモ否定デアル。

$(C^{(p)})$ $p \geq 1$, (C_0) ニ於テ問題が否定ナルコト。

$(C^{(p)})$ $p \geq 1$ ト (C), (C_0) ト (c) トハ夫々 isomorphic デアル。依ツテ更ヲ $(C^{(p)})$ $p \geq 1$ ヲ完全ニ (C) ニ移ス 1對1, linear ナ operator トスル。若シ $(C^{(p)})$ $p \geq 1$ デ肯定デアルナラバ、$(C^{(p)})$ $p \geq 1$ ノ中ノ任意ノ closed linear manifold $\mathfrak{M}$ ニ對シ、closed linear manifold $\mathfrak{N}$ ガ $(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ノ中ニ存在シテ、$(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ノ任意ノ element f ハ uniquely ニ $f=g+h$, $g\in\mathfrak{M}$, $h\in\mathfrak{N}$ トナル。$\Phi(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}^*$, $\Phi(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}^*$, $\Phi(f)=f^*$, $\Phi(g)=g^*$, $\Phi(h)=h^*$ トスルト、$\mathfrak{M}^*$, $\mathfrak{N}^*$ ハ共ニ closed linear manifold デ、$f^*\in(C)$ デアッテ uniquely ニ $f^*=g^*+h^*$, $g^*\in\mathfrak{M}^*$, $h^*\in\mathfrak{N}^*$ トナル。之レハ矛盾デアル。從ッテ $(C^{(p)})\ p\geqq 1$ ニ於テ吾々ノ問題ハ否定デアル。

全ク同様ノ論法ニ依ッテ (c_0) ニ於テモ否定デアルコトガ云ヒ得ル。